

UNIVERSITÉ DE NANCY — FACULTÉ DES SCIENCES

THÈSES

PRÉSENTÉES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY

POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE NANCY

Mention " Sciences "

PAR

M. Émile-Eugène STIHI

1^{re} Thèse : ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES INVARIANTS DES
FORMES QUADRATIQUES DE DIFFÉRENTIELLES

2^e Thèse : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

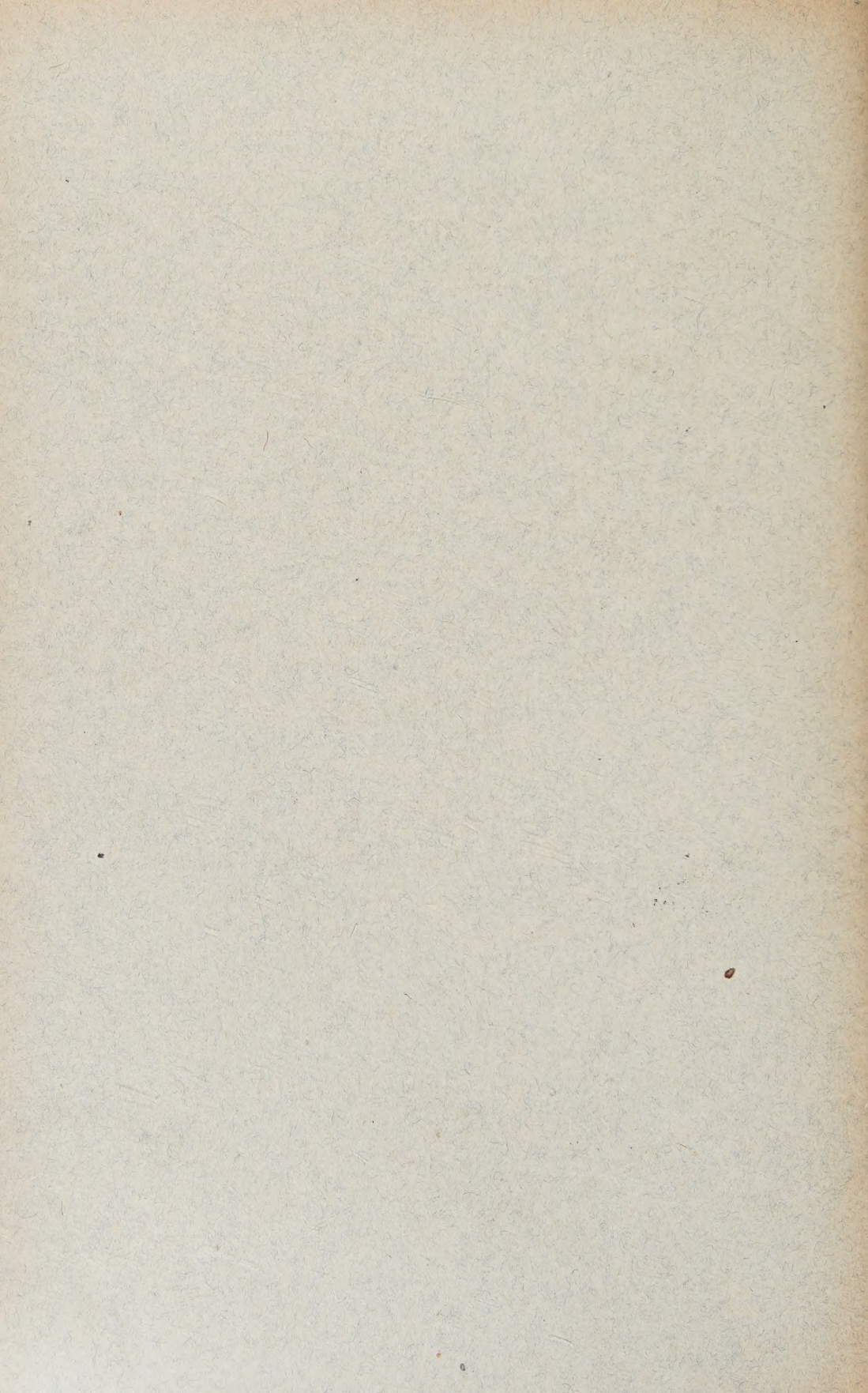
Soutenues le 25 juillet 1925 devant la Commission d'examen

Président :	M. VOGT
Examineurs {	MM. LEAU
	DARMOIS (G.)

IMPRIMERIE BERGER-LEVRAULT

NANCY-PARIS-STRASBOURG

1925



THÈSES

PRÉSENTÉES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY

POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE NANCY

Mention " Sciences "

PAR

M. Émile-Eugène STIHI

1^{re} Thèse : ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES INVARIANTS DES
FORMES QUADRATIQUES DE DIFFÉRENTIELLES

2^e Thèse : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 25 juillet 1925 devant la Commission d'examen



Président : M. VOGT
Examineurs { MM. LEAU
DARMOIS (G.)

IMPRIMERIE BERGER-LEVRAULT
NANCY-PARIS-STRASBOURG

1925

UNIVERSITÉ DE NANCY — FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen : M. PETIT.

Assesseur : M. GAIN.

Professeurs honoraires : MM. BLONDLLOT, CARTAN, BLAISE,
LE MONNIER, THOULET, MULLER, GUYOT.

Chargé de cours honoraire : M. MILLOT.

Professeurs :

MM. PETIT.	Chimie agricole.
VOGT.	Mathématiques appliquées.
GUNTZ	Chimie minérale.
CUÉNOT.	Zoologie.
GAIN	Botanique.
GUTTON.	Physique.
HUSSON.	Mécanique rationnelle.
MAUDUIT.	Électrotechnique.
LEAU.	Calcul différentiel et intégral.
BOURION.	Chimie physique et Électrochimie.
DARMOIS (E.). . . .	Physique.
VAVON	Chimie organique.
TRAVERS.	Chimie industrielle.
DARMOIS (G.). . . .	Analyse supérieure.
LONGCHAMBON. . .	Minéralogie.
FALLOT.	Géologie.
COURTOT.	Chimie appliquée à la teinture.
CORNUBERT	Chimie.
BOUIN	Zoologie appliquée.
GRUMBACH.	Physique.
CROZE	Physique.
MENTRÉ	Mécanique appliquée.

Chargé de Cours :

M. JOLY Géologie de Lorraine.

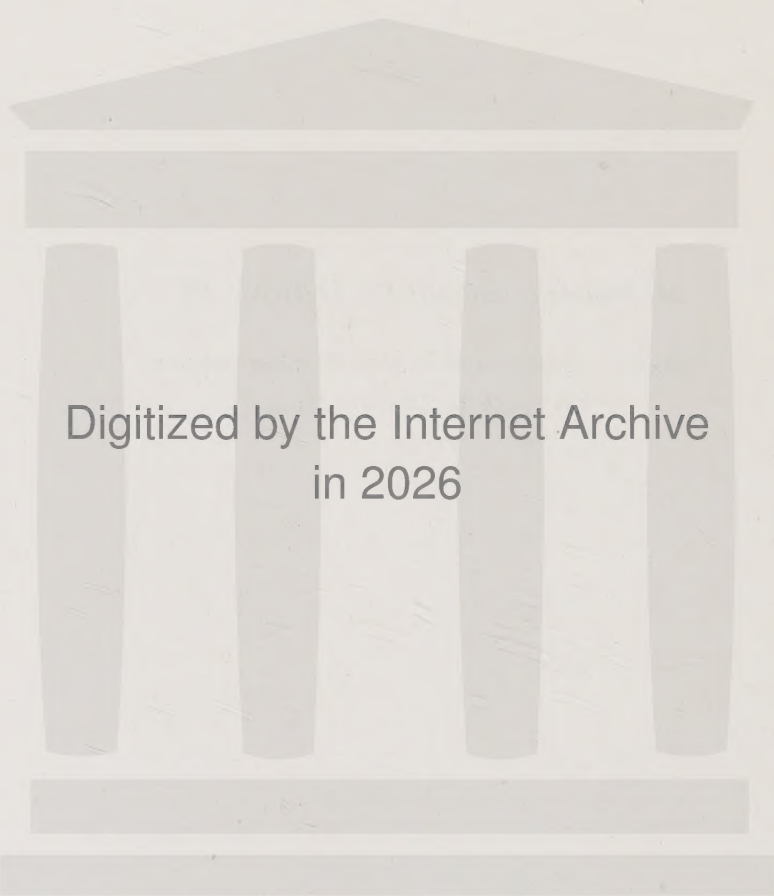
Maître de Conférences :

M. RAYBAUD. Botanique.

Secrétaire : M. BERTRAND.

A Monsieur GEORGES DARMOIS

*Professeur d'Analyse supérieure et de Géométrie supérieure
à la Faculté des Sciences de Nancy*



Digitized by the Internet Archive
in 2026

AVANT-PROPOS

*Le présent travail a été fait sous la direction de M. G. Dar-
mois auquel nous voulons exprimer ici notre gratitude respec-
tueuse et dévouée pour l'aide qu'il nous a toujours accordée avec
une bienveillance sans cesse renouvelée, les conseils qu'il nous
a donnés et pour l'aimable intérêt qu'il a porté à nos études.
Nous avons pu entreprendre ces études grâce à la générosité
de l'Université de Nancy qui a bien voulu mettre à la disposition
de l'Université de Jassy (Roumanie) deux bourses de perfec-
tionnement pour la Faculté des Sciences. Nous remplissons
un agréable devoir en exprimant nos profonds remerciements
au Conseil de l'Université de Nancy qui, par cette décision, a
su, dans les moments difficiles que nous traversons, nous encou-
rager dans la voie des recherches scientifiques. Nous assurons
particulièrement de notre gratitude M. Ch. Adam, recteur de
l'Université de Nancy, et M. Petit, doyen de la Faculté des
Sciences, qui, en toute occasion, nous ont honoré de leur haute
sollicitude, ainsi que MM. les professeurs de la Faculté des
Sciences de Jassy, qui nous ont présenté comme candidat à
l'attribution d'une de ces bourses.*

E. E. S.

PREMIÈRE THÈSE

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES INVARIANTS

DES FORMES QUADRATIQUES DE DIFFÉRENTIELLES

INTRODUCTION

Le but de notre travail est de montrer que, parmi les résultats de la géométrie différentielle, une partie assez considérable et importante peut être mise à la portée de ceux qui possèdent les notions habituelles des mathématiques spéciales ⁽¹⁾. En particulier l'emploi des variables que Lipschitz appelle normales est — à notre avis — de nature à présenter l'étude des invariants d'une forme quadratique de différentielles d'une manière assez simple et de donner en même temps, par les liens étroits qui existent entre les coefficients de ladite forme et les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel, une vue plus claire sur la nature de ce tenseur.

⁽¹⁾ Voir G. DARMOIS : « Éléments de géométrie des espaces » (*Annales de Physique*), 1924.

Nous avons utilisé les notations et les conventions qui nous ont paru les plus répandues et en particulier :

la présence de deux ou plusieurs indices identiques indique une sommation par rapport à ces indices (par ex.

$$a^{ii} \lambda_i = \sum_{i=1}^n a^{ii} \lambda_i);$$

les composantes covariantes du tenseur de Riemann-Christoffel sont désignées par R_{abcd} , et quant au signe adopté pour ce tenseur, il est le même que celui pris par Christoffel lui-même.

§ 1. — LES VARIABLES NORMALES

1. — Soit $M (x_1 x_2 \dots x_n)$ un point variable de l'espace (E) à n dimensions et $O (x_i = x_i^0)$ un point fixe de cet espace. Considérons la forme quadratique de différentielles

$$F = g_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2 \dots n)$$

et supposons que les g_{ik} sont développables en séries entières en $x_i - x_o$ et convergentes dans un certain domaine autour du point O avec le déterminant $g = |g_{ik}|$ différent de zéro au point O. En particulier si F est la forme métrique fondamentale de l'espace (E) nous allons écrire

$$(1) \quad F = \varepsilon ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Considérons une courbe $x_i = x_i(t)$, qui passe par le point O ($t = t_0$) et soit $\rho(t)$ l'arc de cette courbe donné par

$$\rho(t) - \rho(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varepsilon g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt}} \cdot dt$$

Supposons que cette courbe est une géodésique (Γ) et que $\rho(t_0) = 0$; elle sera déterminée par les équations

$$\frac{d^2 x_r}{d\rho^2} + \left\{ \begin{matrix} i & k \\ r \end{matrix} \right\} \frac{dx_i}{d\rho} \frac{dx_k}{d\rho} = 0$$

et par les conditions initiales

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^0 \\ \left(\frac{dx_i}{d\rho} \right)_0 &= \tau^i \end{aligned}$$

avec

$$(2) \quad (g_{ik})^{-1} \tau^i \tau^k = \varepsilon$$

Les équations de (I') seront des développements en série

$$(3) \quad x_r - x_r^0 = \xi^r \rho - \frac{1}{2!} \left\{ \begin{matrix} i & k \\ r & 0 \end{matrix} \right\} \xi^i \xi^k \rho^2 + \dots + \frac{1}{s!} P_{r^{(s)}}(\xi) \rho^s + \dots$$

où $P_{r^{(s)}}(\xi)$ est un polynôme homogène du s^e degré en ξ .

On peut poser

$$\xi^r \rho = y_r$$

et les équations (3) deviennent

$$(4) \quad x_r - x_r^0 = y_r - \frac{1}{2!} \left\{ \begin{matrix} i & k \\ r & 0 \end{matrix} \right\} y_i y_k + \dots + \frac{1}{s!} P_{r^{(s)}}(y) + \dots$$

Les relations (3) et (4) nous donnent des formules de transformation qui permettent de passer des variables x , soit aux $n + 1$ variables ξ et ρ liées par la relation (2), soit aux n variables indépendantes y que Lipschitz appelle les variables normales de l'espace (1).

2. — Par la transformation (4) la forme F devient

$$(5) \quad F = a_{ik} dy_i dy_k$$

où les a_{ik} sont des fonctions des y , développables en séries entières suivant les puissances des y et convergentes dans un certain domaine autour du point O ($y_i = 0$), avec le déterminant $a = |a_{ik}|$ différent de zéro au point O.

On peut écrire aussi

$$F = a_{ik} \xi^i \xi^k d\rho^2 + 2 a_{ik} \xi^i d\xi^k \rho d\rho + \rho^2 a_{ik} d\xi^i d\xi^k$$

Mais la courbe $\xi = \text{const.}$ est justement la géodésique (I'), donc

$$(6) \quad a_{ik} \xi^i \xi^k = \varepsilon$$

et l'hypersurface $\rho = \text{const.}$ étant orthogonale aux géodé-

(1) LIPSCHITZ, Extrait de six mémoires publiés dans le Journal de Mathématiques de Borchardt (*Bulletin des Sciences mathématiques*). 4. 1874.

siques issues de 0

$$a_{ik} \xi^i d\xi^k = 0$$

Mais on peut déduire de (2)

$$(g_{ik})^0 \xi^i d\xi^k = 0$$

donc

$$(7) \quad a_{ik} \xi^i = C (g_{ik})^0 \xi^i$$

On voit facilement que $C = 1$ et si l'on pose

$$a_{ik} = (g_{ik})^0 + b_{ik}$$

les relations (6) et (7) deviennent

$$(8) \quad \begin{aligned} b_{ik} y_i y_k &= 0 \\ b_{ik} y_i &= 0 \end{aligned}$$

On peut remarquer que la relation (8) contient celle qui la précède et qu'on peut en déduire par dérivation

$$(9) \quad 2 b_{ik} = \frac{\partial^2 b_{pq}}{\partial y_i \partial y_k} y_p y_q$$

On voit donc que le développement en série de b_{ik} commence par des termes du second degré.

Posons

$$\left(\frac{\partial^s b_{ik}}{\partial y_{u_1} \partial y_{u_2} \dots \partial y_{u_s}} \right)_0 = (i k; u_1 u_2 \dots u_s)$$

on peut donc écrire l'identité (8)

$$\sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s!} (i k; u_1 u_2 \dots u_s) y_{u_1} y_{u_2} \dots y_{u_s} y_i = 0$$

ou, en égalant les coefficients à zéro,

$$(10) \quad \sum_{p=1}^s (u_p k; u_1 u_2 \dots u_{p-1} u_{p+1} \dots u_s) = 0$$

Cette relation peut se mettre encore sous les formes

$$(11) \quad \sum_{p=1}^s (u_p k; u_1 u_2 \dots u_{p-1} i u_{p+1} \dots u_s) = - (i k; u_1 u_2 \dots u_s)$$

$$(12) \quad \begin{aligned} & \sum_{p=1}^s (u_p u_q; u_1 u_2 \dots u_{p-1} i u_{p+1} \dots u_{q-1} k u_{q+1} \dots u_s) = \\ & = - (i u_q; u_1 u_2 \dots u_{q-1} k u_{q+1} \dots u_s) - (k u_q; u_1 u_2 \dots u_{q-1} i u_{q+1} \dots u_s) \end{aligned}$$

où le signe Σ' signifie que l'indice p prend toutes les valeurs de 1 à s sauf la valeur $p = q$.

On trouve encore par l'application successive des identités (11) et (12)

$$(13) \quad \sum'_{p, q=1}^s (u_p u_q; u_1 u_2 \dots u_{p-1} i u_{p+1} \dots u_{q-1} k u_{q+1} \dots u_s) = \\ = 2 (ik; u_1 \dots u_s)$$

3. — On a

$$F = (g_{ik})^0 dy_i dy_k + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s!} (ik; u_1 u_2 \dots u_s) y_{u_1} y_{u_2} \dots y_{u_s} dy_i dy_k$$

Posons

$$\Phi = (ik; u_1 u_2 \dots u_s) y_{u_1} y_{u_2} \dots y_{u_s} dy_i dy_k$$

On a, par des changements d'indices,

$$\Phi = \Phi_{pi} = (u_p k; u_1 \dots u_{p-1} i u_{p+1} \dots u_s) y_{u_1} \dots y_{u_{p-1}} y_i y_{u_{p+1}} \dots \\ \dots y_{u_s} dy_{u_p} dy_k$$

$$\Phi = \Phi_{qk} = (i u_q; u_1 \dots u_{q-1} k u_{q+1} \dots u_s) y_{u_1} \dots y_{u_{q-1}} y_k y_{u_{q+1}} \dots \\ \dots y_{u_s} dy_i dy_{u_q}$$

$$\Phi = \Phi_{pq, ik} = (u_p u_q; u_1 \dots u_{p-1} i u_{p+1} \dots u_{q-1} k u_{q+1} \dots u_s) y_{u_1} \dots \\ \dots y_{u_{p-1}} y_i y_{u_{p+1}} \dots y_{u_{q-1}} y_k y_{u_{q+1}} \dots y_{u_s} dy_{u_p} dy_{u_q}$$

Considérons encore

$$\Phi'_{pk} = (u_p i; u_1 \dots u_{p-1} k u_{p+1} \dots u_s) y_{u_1} \dots y_{u_{p-1}} y_i y_{u_{p+1}} \dots y_{u_s} dy_{u_p} dy_k$$

$$\Phi'_{qi} = (k u_q; u_1 u_2 \dots u_{q-1} i u_{q+1} \dots u_s) y_{u_1} \dots y_{u_{q-1}} y_k y_{u_{q+1}} \dots y_{u_s} dy_i dy_{u_q}$$

que l'on peut écrire par des changements d'indices

$$\Phi'_{pk} = (i u_p; u_1 \dots u_{p-1} k u_{p+1} \dots u_s) y_{u_1} \dots y_{u_s} dy_i dy_k$$

$$\Phi'_{qi} = (u_q k; u_1 \dots u_{q-1} i u_{q+1} \dots u_s) y_{u_1} \dots y_{u_s} dy_i dy_k.$$

donc, en appliquant la formule (11),

$$\sum_{p=1}^s \Phi'_{pk} = \sum_{q=1}^s \Phi'_{qi} = - \Phi.$$

Formons l'expression

$$2\Phi + \sum_{p=1}^s (\Phi_{pi} + \Phi'_{pk}) + \sum_{q=1}^s (\Phi_{qk} + \Phi'_{qi}) + \sum_{p,q=1}^s \Phi_{pq,ik}$$

qui est égale, d'après ce que nous avons vu plus haut, à $s(s+1)\Phi$ et appliquons la formule (13) au terme 2Φ et la formule (12) aux parenthèses; on trouve

$$s(s+1)\Phi = \sum'_{p,q=1}^s (u_p u_q; u_1 \dots u_{p-1} i u_{p+1} \dots u_{q-1} k u_{q+1} \dots u_s) y_{u_1} \dots \\ \dots y_{u_{p-1}} y_{u_{p+1}} \dots y_{u_{q-1}} y_{u_{q+1}} \dots y_{u_s} [y_{u_p} dy_i - y_i dy_{u_p}] \\ \cdot [y_{u_q} dy_k - y_k dy_{u_q}]$$

et, en remplaçant dans la forme F,

$$F = (g_{ik})^0 dy_i dy_k + [abcd] [y_a dy_b - y_b dy_a] [y_c dy_d - y_d dy_c]$$

avec

$$[abcd] = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s+1}{(s+3)!} (ac; b du_1 \dots u_s) y_{u_1} \dots y_{u_s}$$

Posons encore

$$4(abcd) = [abcd] - [bacd] - [abdc] + [badc] \\ [ab] = y_a dy_b - y_b dy_a$$

et on peut écrire la forme F

$$(14) \quad F = (g_{ik})^0 dy_i dy_k + (abcd) [ab] [cd]$$

$$(15) \quad F = (g_{ik})^0 dy_i dy_k + 4(abcd) y_a y_c dy_b dy_d$$

Nous allons dire que (14) est la forme normale du ds^2 de (E).

4. — Les coefficients $(abcd)$ ont certaines propriétés de symétrie qu'on peut vérifier facilement.

$$(16) \quad \begin{cases} (abcd) = -(bacd) \\ (abcd) = -(abdc) \\ (abcd) = (cdab) \\ (abcd) + (acdb) + (adbc) = 0 \\ \frac{\partial (abcd)}{\partial y_e} + \frac{\partial (abde)}{\partial y_c} + \frac{\partial (abec)}{\partial y_d} = 0 \end{cases}$$

les trois premières sont des conséquences immédiates de la définition de ces coefficients; la quatrième se déduit des égalités

$$[abcd] = [adcb] = [cbad] = [cdab];$$

quant à la dernière des relations (16), il suffit d'observer que

$$\frac{\partial [abcd]}{\partial y_e} = \frac{\partial [abce]}{\partial y_d}.$$

Le tenseur de Riemann-Christoffel de la forme (15) est donné par

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = & -12(\alpha\beta\gamma\delta) - 12 \frac{\partial(\alpha\beta\gamma\delta)}{\partial y_u} y_u - 2 \frac{\partial^2(\alpha\beta\gamma\delta)}{\partial y_u \partial y_v} y_u y_v + \\ & + a^{uv} \{ [{}^\alpha_\delta] [{}^\beta_\gamma] - [{}^\alpha_\gamma] [{}^\beta_\delta] \} \end{aligned}$$

où l'on suppose que les $[{}^\alpha_\gamma]$ sont calculés à l'aide de la forme (5). On peut observer aussi que

$$[{}^\alpha_\gamma]_0 = 0,$$

donc

$$\begin{aligned} (R_{abcd})_0 &= -12 (abcd)_0 \\ [(R_{abcd})_e]_0 &= -24 \left[\frac{\partial (abcd)}{\partial y_e} \right]_0. \end{aligned}$$

On retrouve donc pour le point O, qui est d'ailleurs choisi arbitrairement les propriétés connues du tenseur de Riemann-Christoffel et de sa dérivée covariante (1).

(1) L'identité de Bianchi

$$(R^a_{bcd})_e + (R^a_{bde})_c + (R^a_{bec})_d = 0$$

se vérifie d'ailleurs directement par l'emploi des variables normales en remarquant que les symboles de Christoffel sont nuls en O. C'est cette identité qui sert généralement à la démonstration de la propriété de conservation du tenseur de gravitation.

§ 2. — LA FORME NORMALE DU ds^2

5. — Considérons F et F', formes métriques des espaces (E) et (E') respectivement.

$$\begin{aligned} F &= g_{ik} dx_i dx_k \\ F' &= g'_{ik} dx'_i dx'_k \end{aligned}$$

Supposons que (E) et (E') sont applicables l'un sur l'autre, c'est-à-dire que l'on peut trouver une correspondance

$$\begin{aligned} (20) \quad x_i &= x_i(x'_k) \\ dx_i &= \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} dx'_k \end{aligned}$$

telle que l'égalité.

$$(21) \quad g_{ik} dx_i dx_k = g'_{ik} dx'_i dx'_k$$

soit une conséquence des relations (20).

Soit

$$D = \left| \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} \right|$$

le jacobien des x_i ; supposons que le point M' de (E') appartient à un domaine dans lequel D ne s'annule pas et soit M le correspondant de M'. Considérons une géodésique $x' = x'_i(t)$ dans (E') et soit $x_i = x_i(t)$ sa correspondante dans (E). L'égalité (21) nous donne $\varphi(t) = \varphi'(t)$, donc

$$\frac{dx_i}{d\varphi} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} \frac{dx'_k}{d\varphi'}$$

ou, si O et O' se correspondent par (20),

$$(22) \quad y_i = \mu_i^k y'_k$$

en désignant par μ_i^k les valeurs des dérivés $\frac{\partial x_i}{\partial x'_k}$ au point O'.

Les relations (22) nous montrent que la correspondance des espaces (E) et (E') s'exprime par des relations linéaires entre les variables normales des deux espaces. Il en résulte encore que (22) exprime aussi les changements des variables normales dans un même espace (E).

On déduit de (22)

$$\begin{aligned} dy_i &= \mu^i_i dy'_i \\ [x\beta] &= \mu^a_a \mu^b_b [a\ b]'. \end{aligned}$$

6. — La relation (21) s'écrit avec des variables normales

$$\begin{aligned} (g_{ik})^0 dy_i dy_k + (abcd) [ab] [cd] &= (g'_{ik})^0 dy'_i dy'_k + \\ &+ (abcd)' [ab]' [cd]' \end{aligned}$$

et cette identité, qui est vraie pour tous les couples de points correspondants, nous donne pour le couple (O, O')

$$(g_{ik})^0 dy_i dy_k = (g'_{ik})^0 dy'_i dy'_k.$$

Il en résulte

$$(abcd) [ab] [cd] = (abcd)' [ab]' [cd]'.$$

On peut remplacer ces relations par

$$\begin{aligned} (23) \quad (g'_{ik})^0 &= (g_{ik})^0 \mu^i_i \mu^k_k \\ (x\beta\gamma\delta)' &= (abcd) \mu^a_a \mu^b_b \mu^c_c \mu^d_d \end{aligned}$$

dont la dernière s'écrit, pour le couple (O, O'),

$$(24) \quad (R'_{\alpha\beta\gamma\delta})_0 = (R_{abcd})_0 \mu^a_a \mu^b_b \mu^c_c \mu^d_d$$

Le nombre des relations (23) est $\frac{n(n+1)}{2}$, celui des relations (24) est, en tenant compte des identités (16), $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$, donc, en général, les n^2 coefficients μ^i_i se trouvent parfaitement déterminés par ces relations qui nous fournissent encore

$\frac{n(n-1)(n-2)(n+3)}{12}$ conditions nécessaires pour que

l'application des deux espaces soit possible (1).

7. — Proposons-nous de faire dans (E) un changement de variables normales tel que la forme quadratique, à coefficients constants

$$F_0 = (g_{ik})^0 dy_i dy_k$$

se réduise à une somme de n carrés indépendants, ce qui est toujours possible si $g_0 \neq 0$.

Soient y'_i les nouvelles variables. On a

$$(25) \quad F = \varepsilon_i (dy'_i)^2 + (abcd)' [ab]' [cd]'$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= +1 & (i \leq r) \\ \varepsilon_i &= -1 & (i > r). \end{aligned}$$

On dit que (25) est une forme réduite de F , ou du ds^2 de l'espace (E). Supposons que les ds^2 de deux espaces (E) et (E'), applicables l'un sur l'autre, soient mis sous leurs formes réduites. Il est évident que $r = r'$ et dans ce cas les relations (23) deviennent

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_i \mu_i^p \mu_i^q = 0 \quad (p \neq q) \\ \varepsilon_i (\mu_i^p)^2 = \varepsilon_p \end{array} \right.$$

que l'on peut écrire aussi

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_p \mu_i^p \mu_k^p = 0 \quad (i \neq k) \\ \varepsilon_p (\mu_i^p)^2 = \varepsilon_i \\ |\mu_i^k| = \mu = \pm 1 \end{array} \right.$$

Le déterminant μ étant toujours différent de zéro, il y a

(1) CARTAN, Équations de la gravitation d'Einstein (*Journal de Math. pures et appliquées*), 1922.

au moins un terme dans son développement qui est différent de zéro. Des relations (26) et (27), il résulte aussi qu'il y a au moins un terme différent de zéro dans chacun des deux déterminants

$$\begin{aligned}\mu' &= |\mu_i^k| & (i, k = 1, 2, \dots, r) \\ \mu'' &= |\mu_i^k| & (i, k = r + 1, r + 2, \dots, n).\end{aligned}$$

On peut donc, par une permutation d'indices, s'arranger pour avoir tous les termes de la diagonale principale de μ différents de zéro.

8. — Proposons-nous de faire dans (E) un changement de variables normales, tel que, les deux formes quadratiques à coefficients constants

$$\begin{aligned}F_0 &= (g_{ik})^0 dy_i dy_k \\ \varphi_0 &= (R_{ik})^0 dy_i dy_k\end{aligned}$$

où R_{ik} est le tenseur de Riemann-Christoffel contracté

$$R_{ik} = a^{pq} R_{ipkq}$$

se réduisent à des sommes de carrés, ce qui est toujours possible (Le problème se réduit à la recherche du $n^{e\text{dre}}$ autopolaire commun de deux hypersurfaces du second degré $F_0 = 0$ $\varphi_0 = 0$ dans un espace à $n - 1$ dimensions). On peut s'arranger de manière que dans une de ces deux formes, F_0 par exemple, les coefficients de ces carrés soient égaux à ± 1 .

Soient y'_i les nouvelles variables. On a

$$\begin{aligned}F_0 &= \varepsilon_i (dy'_i)^2 \\ \varphi_0 &= \rho_i (dy'_i)^2 \\ (28) \quad (R'_{ik})^0 &= 0 \quad (i \neq k)\end{aligned}$$

Nous allons dire que (25) est la forme canonique de F , ou du ds^2 de l'espace (E) si les conditions (28) sont satisfaites.

Supposons les ds^2 des deux espaces (E) et (E'), applicables

l'un sur l'autre, mis sous leurs formes canoniques. Les relations (26) vont subsister et l'on doit avoir encore

$$\begin{aligned}\rho_i \mu_i^p \mu_i^q &= 0 & (p \neq q) \\ \rho_i (\mu_i^p)^2 &= \rho'_p.\end{aligned}$$

En comparant avec les équations (26) on trouve

$$(29) \quad (\varepsilon_i \rho_i - \varepsilon_k \rho'_k) \mu_i^k = 0$$

ou il n'y a pas de sommation par rapport aux indices i et k . Il en résulte

$$\rho_i = \rho'_i.$$

Considérons le déterminant

$$S(\lambda) = |R_{ik} - \lambda g_{ik}|$$

et soient $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ les racines de l'équation $S(\lambda) = 0$.

Cette équation est invariante. Ses racines sont donc des fonctions invariantes et pour une forme canonique on a

$$S(\lambda) = (\rho_1 - \lambda \varepsilon_1)(\rho_2 - \lambda \varepsilon_2) \dots (\rho_n - \lambda \varepsilon_n) = 0.$$

Cette forme nous montre la relation qui existe entre la discussion de cette équation et celle du système (29). On peut remarquer que la relation

$$|g^{ik}| = \frac{1}{g}$$

nous permet d'écrire l'équation $S(\lambda) = 0$ sous les deux formes

$$\begin{aligned}\frac{1}{g} S(\lambda) &= |R_i^k - \lambda g_i^k| = 0 \\ \frac{1}{g^2} S(\lambda) &= |R^{ik} - \lambda g^{ik}| = 0\end{aligned}$$

équivalentes à la première.

§ 3. — SUR LES INVARIANTS DE F.

9. — On peut remarquer que la condition (8) est nécessaire et suffisante pour avoir F sous sa forme normale et que les relations (16) ne sont que des conséquences de cette condition. En même temps (17) nous permet de déterminer les $(abcd)$ en fonction des composantes R_{abcd} du tenseur de Riemann-Christoffel avec des variables normales, tout aussi bien que ces composantes elles-mêmes en fonction des coefficients $(abcd)$. En effet, par dérivations successives, on peut obtenir n'importe quel terme du développement en série de $(abcd)$ en fonction des termes des R_{abcd} . Il en résulte qu'on peut choisir arbitrairement les $(abcd)$ si les conditions (16) sont satisfaites et inversement qu'il n'y a pas d'autre relation identique entre les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel que celles qui sont déjà connues puisqu'avec des R_{abcd} quelconques satisfaisant à ces conditions on peut construire le ds^2 qui les admet.

10. — Nous allons dire que

$$I_s \left(g_{ik}, \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_u}, \dots, \frac{\partial^s g_{ik}}{\partial x_{u_1} \partial x_{u_2} \dots \partial x_{u_s}} \right)$$

est un invariant d'ordre s de F, si les dérivées d'ordre le plus élevé qui entrent dans cet invariant sont d'ordre s .

Avec des variables normales et par le choix convenable de la transformation (22), on peut prendre des $(g_{ik})^0$ arbitraires (à condition de conserver le nombre des carrés positifs et négatifs de la forme $(g_{ik})^0 dy_i dy_k$ et d'avoir $g_0 \neq 0$) et on a

toujours

$$\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial y_s}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial y_s \partial y_t}\right)_0 = -\frac{1}{3} [R_{silk} + R_{tsik}]_0.$$

Il en résulte qu'une forme F n'a pas d'invariant d'ordre 0 ou 1.

Considérons les invariants d'ordre 2 de F .

Ces invariants existent pour $n \geq 3$. En effet, les formes canoniques du ds^2 existent toujours et si les λ_i sont tous différents, leurs coefficients sont des invariants. En particulier les $(abcd)_0$ sont des invariants d'ordre 2. Parmi ceux-ci, il y en a en général $\frac{n(n-1)(n-2)(n+3)}{12}$ qui sont indépendants puisque c'est le nombre de ceux qu'on peut choisir arbitrairement.

Si I est un invariant d'ordre 2 de F , sa valeur, au point o , est, avec des variables normales autour de o , fonction des $(g_{ik})^0$ et des $(R_{ab|cd})_0$. Si (E) et (E') sont applicables l'un sur l'autre, l'invariant I calculé dans ces deux espaces a la même valeur et en appliquant les formules (23) et (24) on en déduit une relation entre $(g_{ik})^0$, $(R_{ab|cd})_0$ et μ_p^a . Cette relation ne contient pas les μ parce qu'elle doit être satisfaite quelle que soit la transformation (22). Elle doit être, d'ailleurs, une conséquence des identités (16) parce qu'il n'y a pas d'autre relation identique entre les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel. Il en résulte que les seuls invariants indépendants d'ordre 2 sont obtenus au n° 6 par l'élimination des μ entre les relations (23) et (24) et leur nombre est en général $\frac{n(n-1)(n-2)(n+3)}{12}$.

11. — Nous avons laissé de côté le cas $n = 2$, mais on sait que la courbure totale K est un invariant d'ordre 2 et que tous les autres sont fonction de celui-ci puisque dans ce cas le tenseur de Riemann-Christoffel n'a qu'une seule composante qui compte (les autres sont fonction de celle-ci).

Pour $n = 3$, il y a trois invariants d'ordre 2 qui sont justement les trois racines de $S(\lambda) = 0$. On peut prendre au lieu de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les trois quantités

$$\frac{\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1}{2}, \frac{\lambda_3 + \lambda_1 - \lambda_2}{2}, \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3}{2}$$

qui sont les courbures totales des trois surfaces géodésiques déterminées par les axes canoniques, pris deux à deux.

Si l'on veut interpréter d'une manière analogue les quatorze invariants du second ordre d'un espace à quatre dimensions, on trouve deux invariants caractéristiques de cet espace qui sont les

$$(1\ 2\ 3\ 4)_0, (1\ 3\ 4\ 2)_0, (1\ 4\ 2\ 3)_0$$

liés par la relation

$$(1\ 2\ 3\ 4)_0 + (1\ 3\ 4\ 2)_0 + (1\ 4\ 2\ 3)_0 = 0$$

de la forme canonique de F et les trois invariants de chacun des quatre espaces géodésiques à trois dimensions qu'on peut déterminer par les axes canoniques pris trois à trois. Quant aux courbures totales des surfaces géodésiques déterminées par les axes canoniques, elles sont des fonctions des invariants précédents.

L'interprétation géométrique des invariants d'ordre 2 de l'espace à n dimensions se fait d'une manière analogue. On peut classer ces invariants en deux catégories. Il y en a $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}$ qui sont les invariants caractéristiques de tous les espaces géodésiques à quatre dimensions

qu'on peut déterminer par les axes canoniques pris quatre à quatre et le reste de $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ est donné par les invariants des espaces géodésiques à trois dimensions déterminés par les mêmes axes. On peut observer aussi que les courbures totales des surfaces géodésiques formées par les axes canoniques (donc les λ_i aussi) sont des fonctions des invariants de la deuxième catégorie seulement.

§ 4. — AUTRES APPLICATIONS DES FORMES CANONIQUES

12. — On dit d'après Riemann que l'espace (E) est homogène, si on peut réaliser une application de cet espace sur lui-même, telle que, pour un point O, avec n directions (normales deux à deux) issues de ce point, on puisse choisir un point correspondant O' absolument arbitraire, avec n directions (toujours normales deux à deux) arbitrairement choisies issues de ce point. Cela revient à dire que la forme réduite du ds^2 en O est en même temps une forme canonique, qu'elle reste invariante pour toutes les transformations (22) avec les conditions (26) et qu'elle reste la même quelle que soit l'origine O choisie pour le système de variables normales.

Proposons-nous d'exprimer l'invariance de F pour une même origine O. Il en résulte l'invariance de

$$\psi = (abcd) [ab] [cd]$$

pour les transformations considérées.

Mais les invariants de ce groupe de transformations sont tous des fonctions des invariants

$$\begin{aligned} \omega &= \varepsilon_i y_i^2 \\ \varepsilon_i y_i dy_i \\ \varepsilon_i dy_i^2 \end{aligned}$$

et puisque ψ est du second degré en dy

$$\psi = U(\omega) [\varepsilon_i dy_i^2] + V(\omega) [\varepsilon_i y_i dy_i]^2.$$

Mais on doit avoir $\psi = 0$, pour $y_i = 0$ et pour $dy_i = y_i dt$

donc

$$\begin{aligned} U &= \omega W \\ V + W &= 0. \end{aligned}$$

Donc le ds^2 de (E) devient

$$(30) \quad F = \varepsilon_i dy_i^2 - V \varepsilon_i \varepsilon_k (y_i dy_k - y_k dy_i)^2$$

où i, k sont successivement toutes les combinaisons deux à deux des indices 1, 2, ... n .

13. — Pour trouver le développement en série de V , il faut utiliser la condition que la forme F ne change pas si l'on change l'origine de la forme réduite.

Il en résulte que la surface

$$y_i = 0 \quad (i \neq a, i \neq b)$$

est à courbure constante et, d'après Beltrami,

$$(31) \quad V = K \left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s 2^{2s+3}}{(2s+4)!} (K\omega)^{2s} \right] (K=3V_0)$$

Un espace homogène est donc à courbure de Riemann constante en O . De même l'équation $S(\lambda) = 0$ a en O ses n racines égales à $(n-1)K$ et enfin le système

$$E_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{n} R g_{ik} = 0$$

est satisfait au point O puisqu'il est satisfait pour une forme canonique du ds^2 en ce point.

Inversement, si l'une quelconque de ces trois conditions est satisfaite en tous les points de (E) cet espace est homogène.

On peut remarquer que si $S(\lambda) = 0$ a une racine d'ordre n de multiplicité, cette racine est nécessairement une constante.

14. — On peut considérer aussi des espaces (E) qui, sans être homogènes, ont une seule direction privilégiée; c'est-à-dire tels que la forme canonique du ds^2 de (E) reste invariante

pour toutes les transformations (22) avec les conditions (26) qui conservent cette direction.

Cette forme canonique doit donc comprendre cette direction parmi ses axes, et en supposant que c'est l'axe des y_s qui est conservé, les invariants des transformations considérées sont fonction de

$$\begin{aligned}\omega &= \varepsilon_i y_i^2 & (i \neq s) \\ \varepsilon_i y_i dy_i \\ \varepsilon_i dy_i^2 \\ y_s \text{ et } dy_s\end{aligned}$$

donc

$$\psi = A(\varepsilon_i dy_i^2) + B(\varepsilon_i y_i dy_i)^2 + C dy_s (\varepsilon_i y_i dy_i) + D dy_s^2$$

A, B, C et D étant des fonctions de ω et y_s seulement.

Mais $dy_i = y_i dt$, $dy_s = y_s dt$ doit donner $\psi = 0$, donc

$$A\omega + B\omega^2 + C\omega y_s + D y_s^2 = 0$$

$$D = P\omega$$

$$A + B\omega = Q y_s$$

$$C = -(Q + P y_s)$$

et si l'on fait $dy_i = y_i dt$, $dy_s \neq y_s dt$, ψ doit contenir $(dy_s - y_s dt)^2$ en facteur; donc

$$Q = P y_s$$

et en posant

$$B = -U$$

$$P = -\varepsilon_s V$$

a forme canonique du ds^2 de (E) devient

$$(32) \quad F = \varepsilon_i dy_i^2 + \varepsilon_s dy_s^2 - \varepsilon_i \varepsilon_k U (y_i dy_k - y_k dy_i)^2 - \\ - \varepsilon_i \varepsilon_s V (y_i dy_s - y_s dy_i)^2$$

où i, k sont successivement toutes les combinaisons deux à deux des indices 1, 2, .. $(s - 1)$, $(s + 1)$, ... n .

15. — Nous allons donner enfin une application de l'invariance des racines de $S(\lambda) = 0$ dans le cas de n racines, fonctions distinctes des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Puisque $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ sont indépendantes, on peut les prendre comme nouvelles variables et rapporter l'espace (E) à ces variables. Le ds^2 de (E) devient donc

$$F = c_{ik} d\lambda_i d\lambda_k$$

et les invariants $\Delta\lambda_i$ et $\Delta(\lambda_i \lambda_k)$ deviennent

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_i &= c^{ii} & (\text{il n'y a pas de sommation}) \\ \Delta(\lambda_i \lambda_k) &= c^{ik} \end{aligned}$$

Les c_{ik} sont donc parfaitement déterminés à l'aide de ces $\frac{n(n+1)}{2}$ invariants et dans ce cas on peut résoudre complètement le problème de l'application d'un espace (E') sur (E).

En effet, les relations

$$(33) \quad \lambda_i = \lambda'_i$$

ou $\lambda'_1 \lambda'_2 \dots \lambda'_n$ sont les racines de $S'(\lambda) = 0$ dans (E'), établissent toujours une correspondance entre les deux espaces et cette correspondance est la seule qui peut réaliser l'application.

Les conditions d'applicabilité deviennent donc

$$(34) \quad \begin{cases} \Delta\lambda_i = \Delta\lambda'_i \\ \Delta(\lambda_i \lambda_k) = \Delta(\lambda'_i \lambda'_k) \end{cases}$$

et ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

§ 5. — LES ESPACES A DEUX ET TROIS DIMENSIONS

16. — Si les espaces considérés sont à deux dimensions, on peut supposer

$$\varepsilon_1 = 1$$

et en posant

$$\varepsilon_2 = \varepsilon$$

$$U = -4 (1212)$$

la forme réduite du ds^2 devient

$$(35) \quad F = dy_1^2 + \varepsilon dy_2^2 - U (y_1 dy_2 - y_2 dy_1)^2$$

et cette forme est en même temps la forme canonique du ds^2 de (E). On a

$$\begin{aligned} R_{1212} = & 3 U + 3 \left(\frac{\partial U}{\partial y_1} y_1 + \frac{\partial U}{\partial y_2} y_2 \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} y_1^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial y_1 \partial y_2} y_1 y_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial y_2^2} y_2^2 \right) + \\ & + \frac{y_1^2 + \varepsilon y_2^2}{4 \varepsilon - 4 (y_1^2 + \varepsilon y_2^2) U} \left(2 U + \frac{\partial U}{\partial y_1} y_1 + \frac{\partial U}{\partial y_2} y_2 \right)^2 \\ (36) \quad K = & \frac{R_{1212}}{\varepsilon - (y_1^2 + \varepsilon y_2^2) U} \end{aligned}$$

Les conditions d'applicabilité de deux espaces (E) et (E') se réduisent à

$$U = U'$$

pour les ds^2 sous leurs formes réduites.

On peut démontrer facilement que cette condition équivaut à

$$(37) \quad K (y_1 y_2) = K' (y_1' y_2')$$

avec un système de variables normales orthogonal à l'origine.

En effet, on peut déduire (37) de (36), donc cette condition est nécessaire et, d'autre part, les relations que l'on obtient de (36) par dérivation permettent de tirer les valeurs des dérivées de U à l'origine en fonction des valeurs à l'origine des dérivées de K d'ordre égal tout au plus.

Deux espaces à deux dimensions sont donc applicables l'un sur l'autre si on peut trouver une transformation (22) avec les conditions (26) telle que la relation (37) soit satisfaite.

17. — En supposant que les ds^2 sont mis sous leurs formes réduites autour du couple (O O') de points correspondants et en employant les notations de Monge pour les dérivées partielles à l'origine de K par rapport aux variables $y_1 y_2$, la condition (37) donne

$$\begin{aligned} K_0 &= K'_0 \\ (dK)_0 &= (dK')_0 = p dy_1 + q dy_2 \\ (d^2 K)_0 &= (d^2 K')_0 = r dy_1^2 + 2s dy_1 dy_2 + t dy_2^2 \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

par une correspondance (22) avec les conditions (26). Donc

$$\begin{aligned} K_0 &= K'_0 = \text{invariant} \\ (\Delta K)_0 &= p^2 + \varepsilon q^2 = (\Delta K')_0 = \text{invariant} \\ (\Delta_2 K)_0 &= r + \varepsilon t = (\Delta_2 K')_0 = \text{invariant} \\ r q^2 - 2s p q + t p^2 &= \text{invariant} \\ s^2 - r t &= \text{invariant} \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} K_0 &= K'_0 \\ (\Delta K)_0 &= (\Delta K')_0 \\ [\Delta (K, \Delta K)]_0 &= 2(r + \varepsilon t)(p^2 + \varepsilon q^2) - 2\varepsilon(r q^2 - 2s p q + t p^2) = \\ &= [\Delta (K', \Delta K')]_0 \\ [\Delta (\Delta K)]_0 &= 4(r + \varepsilon t)^2(p^2 + \varepsilon q^2) - 4\varepsilon(r + \varepsilon t)(r q^2 - 2s p q + t p^2) + \\ &+ 4\varepsilon(s^2 - r t)(p^2 + \varepsilon q^2) = [\Delta (\Delta K')]_0 \end{aligned}$$

et ces quatre relations sont suffisantes pour exprimer la correspondance et la condition d'applicabilité des espaces (E) et (E') si ΔK n'est pas fonction de K.

18. — Si $\Delta K = f(K)$ et $\Delta_2 K$ n'est pas fonction de K, les relations

$$\begin{aligned} K_0 &= K'_0 \\ (\Delta_3 K)_0 &= (\Delta_3 K')_0 \end{aligned}$$

sont suffisantes pour trouver la correspondance des deux espaces, mais pour exprimer les conditions d'applicabilité, il faut introduire

$$(d_3 K)_0 = (d_3 K')_0$$

qui, en posant

$$(d_3 K)_0 = a dy_1^3 + 3b dy_1^2 dy_2 + 3c dy_1 dy_2^2 + d dy_2^3$$

donne

$$\begin{aligned} p(a + \varepsilon c) + \varepsilon q(b + \varepsilon d) &= \text{invariant} \\ (a + \varepsilon c)^2 + \varepsilon(b + \varepsilon d)^2 &= \text{invariant} \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} [\Delta(\Delta_3 K)]_0 &= K_0^2 (p^2 + \varepsilon q^2) - 2\varepsilon K_0 [p(a + \varepsilon c) + \varepsilon q(b + \varepsilon d)] + \\ &+ (a + \varepsilon c)^2 + \varepsilon(b + \varepsilon d)^2 = [\Delta(\Delta_3 K')]_0 \end{aligned}$$

Cette condition est suffisante pour exprimer que les deux espaces sont applicables si $\Delta K = f(K)$, $\Delta_2 K$ n'étant pas fonction de K.

19. — Si enfin

$$\begin{aligned} \Delta K &= f_1(K) = \Delta K' \\ \Delta_2 K &= f_2(K) = \Delta_2 K' \end{aligned}$$

pour tous les couples de points tels que

$$K = K'$$

cette condition détermine en chaque espace une famille de

courbes

$$K(x_1, x_2) = \lambda$$

et les espaces se correspondent d'une infinité de manières si l'on fait correspondre les courbes de même valeur de λ dans les deux espaces.

Nous avons laissé de côté le cas de la courbure de Gauss constante. Dans ce cas, deux espaces sont applicables, s'ils ont la même courbure totale, d'une double infinité de manières, c'est-à-dire qu'à un point quelconque de (E) on peut faire correspondre un point arbitraire de (E').

20. — Pour un espace (E) à trois dimensions, les formes réduites du ds^2 ne sont plus en général des formes canoniques, c'est-à-dire que l'équation $S(\lambda) = 0$ a trois racines qui ne sont pas toujours égales. Le cas $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ correspond aux espaces homogènes et en particulier

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

donne un espace euclidien.

La forme canonique du ds^2 de (E) est

$$F = \epsilon_i dy_i^2 - A [23]^2 - B [34]^2 - C [12]^2 - 2L [34] [12] - \\ - 2M [12] [23] - 2N [23] [34]$$

avec

$$L = \frac{1}{2} \int_0^{y_2} \int_0^{y_3} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2 C}{\partial y_3^2} \right) dy_2 dy_3 + \\ + \int_0^{y_3} \beta(y_1, y_3) dy_3 - \int_0^{y_2} \gamma(y_1, y_2) dy_2 + y_1 U(y_1) \\ \text{etc...}$$

déduites des conditions (16).

Un espace à trois dimensions dépend donc des neuf fonc-

tions :

$$A(y_1 y_2 y_3), B(y_1 y_2 y_3), C(y_1 y_2 y_3), \alpha(y_2 y_3), \beta(y_1 y_3), \gamma(y_1 y_2), \\ U(y_1), V(y_2), W(y_3)$$

et on peut évaluer, par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 3, le nombre des invariants d'ordre quelconque de la forme F.

Pour l'application de deux espaces à trois dimensions, on sait que si les trois racines $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ sont des fonctions distinctes des variables $x_1 x_2 x_3$ le problème est résolu par l'emploi des invariants $\Delta\lambda_1, \Delta(\lambda_1 \lambda_2)$, etc...

On a vu aussi au n° 12 le cas $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Pour les espaces à une direction privilégiée, enfin, les conditions

$$U = U' \\ V = V'$$

sont nécessaires et suffisantes pour la résolution du problème.

Elles sont d'ailleurs équivalentes aux autres

$$\lambda_i = \lambda_i' \\ \lambda_s = \lambda_s'$$

mais l'application n'est pas résolue si l'on ne connaît pas un couple de points correspondants.

21. — Des considérations analogues peuvent être appliquées aux espaces à quatre dimensions pour trouver le nombre des invariants de la forme métrique correspondante et pour envisager l'application de deux espaces.

La méthode des formes canoniques nous permet toujours de trouver le nombre d'invariants d'une forme quadratique quelconque et de vérifier l'application de deux espaces dont on connaît un couple de points correspondants.

BIBLIOGRAPHIE ⁽¹⁾

- GAUSS. — Recherches générales sur les surfaces courbes (trad.).
Nouvelles Annales de Mathématiques. 1852.
- RIEMANN. — Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie.
(Œuvres (trad.).
- BELTRAMI. — Ricerche di Analisi applicata alla Geometria. Op.
matem. I.
- Sulle teorica generale dei parametri differentiali. Op. matem.
II.
- Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. Op.
matem. I.
- Zur Theorie des Krümmungsmasses. Op. matem. II.
- CHRISTOFFEL. — *Journal f. die reine und ang. Math.* 70.
- LIPSCHITZ. — *Journ. f. die reine u. ang. Math.* 70, 71, 72, 74 ou
— Extrait de six Mémoires, etc. *Bull. des Sciences Math.* 4.
- LIE. — *Math. Annalen.* 24.
- ZORAWSKI. — *Acta Mathem.* 16.
- SCHUR. — *Math. Annalen.* 27.
- DARBOUX. — Leçons sur la théorie générale des surfaces (Gauthier
Villars) VII. ch. II. t. 3.
- BIANCHI. — Vorlesungen über Differentialgeometrie (Teubner)
chap. XXI.
- STRIJK. — Grundzüge der Mehrdimensionalen Differential-
geometrie (J. Springer).
- CARTAN. — *Journal de Math. pures et appliquées*. 1922.
- GALBRUN. — Introduction à la théorie de la relativité, calcul
différentiel absolu et géométrie.

(1) Voir la bibliographie très complète donnée par Struik, *op. cit.*

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

THÉORIE DES CORPS ALGÈBRIQUES

VU ET APPROUVÉ :

Nancy, le 1^{er} juillet 1925.

Pr le Doyen de la Faculté des Sciences :

L'Assesseur délégué,

E. GAIN.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER:

Nancy, le 2 juillet 1925.

Le Recteur de l'Académie de Nancy,

Ch. ADAM,

Membre de l'Institut.

IMPRIMERIE BERGER-LEVRAULT, NANCY-PARIS-STRASBOURG - 1925
